Lezione 20

Cor: A reale $n \times n$. Sono equivalenti:

Teo spettrale

a) A simmetrica

b) $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha base ortonormale di autovettori

rispetto al prod. scalare euclideo

c) $\exists M$ ortogonale t.c.

$$\boxed{{}^tMAM = M^{-1}AM = D \text{ diagonale}}$$

Cor: S matrice simmetrica $n \times n$

La segnatura (i_+, i_-, i_0) di S è il numero di autovalori positivi / negativi / nulli.

Criterio di Cartesio: $p(x) =$ polinomio di grado n, con tutte le radici reali. $p(x) = a_n x^n + \dots - + a_m x^m$

$a_n \neq 0$ $a_m \neq 0$

ovvio → ⊙ m = molteplicità della radice 0 = il "numero" di radici nulle

☆ ⊙ il numero di radici positive è il numero di cambiamenti di segno nella sequenza $a_n, \dots, a_m$ (tolti gli zeri)

Es: $p(x) = x^4 - x^2$ ☆ $p(x) = x^m (a_n x^{n-m} + \dots + a_m)$

⊙ 0 ha molteplicità 2

⊙ $+1$ -1 un cambiamento ⇒ 1 radice positiva

Radici negative: quelle rimanenti: $4 - 2 - 1 = 1$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \lambda_1 \\[2ex] \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \lambda_2 \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}\left(S - \frac{1-\sqrt{5}}{2} I\right) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Span} \begin{array}{c} v_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}\left(S - \frac{1+\sqrt{5}}{2} I\right) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

v_2

v_1 e v_2 DEVONO essere ortogonali per il teorema spettrale

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\underbrace{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}_{-4} = 0$$

In generale, per il teorema spettrale autovettori con autovalori distinti (di una matrice simmetrica!) sono sempre ortogonali.

Ex: $H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ controllate che gli autovettori sono ortogonali in $\mathbb{C}^2$

Quadriche

Polinomio di I grado in $x_1, \dots, x_n$:

$$p(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}_{1°} + \underbrace{c}_{0°}$$

Polinomio di II grado in $x_1, \dots, x_n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{p(x) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}_{2°} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i}_{1°} + \underbrace{c}_{0°}} \longrightarrow \quad A = (a_{ij}) \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$x_i x_j = x_j x_i$ posso supporre $a_{ij} = a_{ji}$

Es: $\mathbb{R}^2$ $\quad x_1, x_2 \quad x, y$

$$p(x,y) = \underbrace{3x^2 - 4xy + 2y^2}_{2°} + \underbrace{4x}_{1°} - \underbrace{7}_{0°}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = -7$$

Si può scrivere $\boxed{p(x) = \underbrace{{}^t x \cdot A \cdot x}_{\varphi_A(x)} + 2\,{}^t b \cdot x + c}$

$\varphi_A(x)$ forma quadratica

Notazione compatta:

$\bar{A}$ $(n+1)\times(n+1)$ $\qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right)$ simmetrica

$\bar{x}$ vettore lungo $n+1$ $\qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{p(x) = {}^t\bar{x} \cdot \bar{A} \cdot \bar{x}}$$ infatti:

$$
{}^t\bar{x} \cdot \bar{A} \cdot \bar{x} = \left(\underbrace{{}^t x}_{n} \;\middle|\; \underbrace{1}_{1} \right) \cdot
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n} & \overbrace{}^{1} \end{array} \\
\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array} \right)
\end{array}
\cdot
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array} \right) & \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}
\end{array}
\overset{?}{=} p(x)
$$

$$
= \left(\underbrace{{}^t x A + {}^t b}_{n} \;\middle|\; \underbrace{{}^t x \cdot b + c}_{1} \right) \cdot
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array} \right) & \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}
\end{array} =
$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

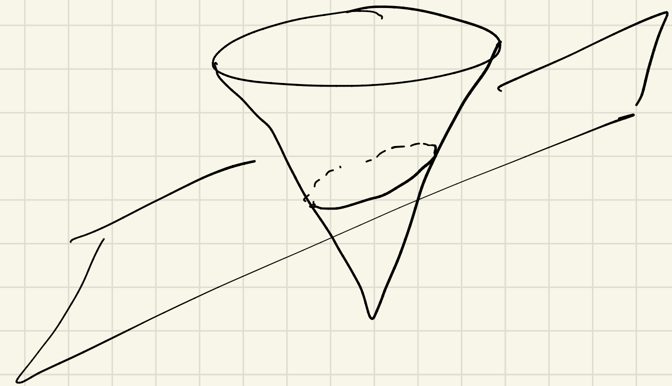
$$\quad // \qquad \qquad \backslash\backslash$$

$$= {}^t x A x + {}^t b \cdot x + {}^t x \cdot b + c$$

$$= {}^t x A x + 2\,{}^t b \cdot x + c = p(x)$$

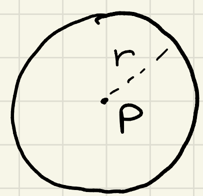
Def: Una **QUADRICA** in $\mathbb{R}^n$ è il luogo di zeri di un polinomio di 2° grado nelle variabili $x_1, \dots, x_n$

Una quadrica in $\mathbb{R}^2$ si chiama **CONICA**



Esempi:

- Circonferenza di centro $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e di raggio r



$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)^2 = r^2 \right\}$$

$$= \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \right\}$$

$$= \{ \underbrace{x^2 + y^2 - 2x x_0 - 2y y_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2}_{p(x,y)} = 0 \}$$

$$= (x\ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \left(-x_0, -y_0\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_{c} = 0$$

$$\underset{b}{b =} \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$$

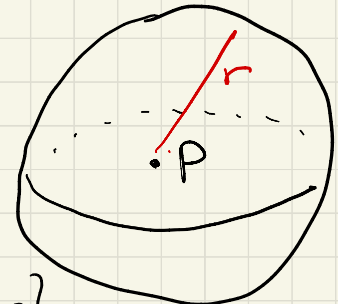
$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ -x_0 & -y_0 & x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{pmatrix}$$

<u>Domanda</u>: $p(x,y) = 34x^2 + 41y^2 + 24xy + 20x - 10y + 4$

Che conica è $\{p(x,y) = 0\} = C$?

Es: Una sfera di raggio $r \geq 0$ e centro $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

è il luogo di punti che distano r da P.



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right)^2 = r^2 \right\}$$

$$= \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \right\}$$

$$= \left\{ p(x,y,z) = 0 \right\}$$

$$p(xyz) = (x\,y\,z\,1)\,\bar{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = (x\,y\,z)\,A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\,{}^t b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ \hline -x_0 & -y_0 & -z_0 & c \end{array} \right)$$

$$c = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$$

Es: $x^2 - y^2 - 1 = 0$ $\qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

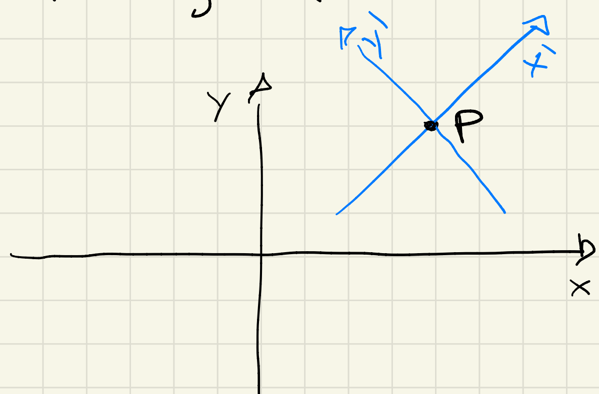
Def: $Q = \{p(x) = 0\}$ è DEGENERE se $\det \bar{A} = 0$

(NON DEGENERE se $\det \bar{A} \neq 0$)

CAMBIO COORDINATE

$$\boxed{x = Mx' + P}$$

M ortogonale $\qquad P \in \mathbb{R}^n$



$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{\bar{M}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n} & \overbrace{\,}^{1} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} M & P \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, 1 \end{array} \end{array}$$

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{x} = \bar{M} \cdot \bar{x}'}$$

infatti: $\bar{M} \cdot \bar{x}' = \begin{pmatrix} M & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} Mx' + P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x}$$

Come cambia l'equazione della quadrica se cambio coordinate?

NOTAZIONE COMPATTA:

$$p(x) = {}^t\bar{x}\,\bar{A}\,\bar{x} = {}^t(\bar{M} \cdot \bar{x}') \cdot \bar{A} \cdot (\bar{M} \cdot \bar{x}')$$

$$= {}^t\bar{x}' \cdot \underbrace{{}^t\bar{M} \cdot \bar{A} \cdot \bar{M}}_{\bar{A}'} \cdot \bar{x}'$$

$$\boxed{\bar{A}' = {}^t\bar{M} \cdot \bar{A} \cdot \bar{M}}$$

$$= {}^t\bar{x}' \cdot \bar{A}' \cdot \bar{x}'$$

La matrice $\bar{A}$ cambia per congruenza usando $\bar{M}$

<u>Oss</u>: $\det \bar{A} = 0 \iff \det \bar{A}' = 0$ (se la quadrica era non degenere in x, lo è anche x')

Anche la SEGNATURA di $\bar{A}$ non cambia

La formula ☆ contiene molte informazioni:

$$\bar{A}' = {}^t\bar{M} \cdot \bar{A} \cdot \bar{M} \quad ☆$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \longrightarrow \bar{A}' = \left(\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline {}^t b' & c' \end{array}\right)$$

$$\bar{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & P \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

★ :
$$\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline {}^t b' & c' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^t M & 0 \\ \hline {}^t P & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & P \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} {}^t M \cdot A & {}^t M \cdot b \\ \hline {}^t P \cdot A + {}^t b & {}^t P \cdot b + c \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & P \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} {}^t M \cdot A \cdot M & {}^t M A P + {}^t M b \\ \hline {}^t P A M + {}^t b M & {}^t P A P + {}^t b P + {}^t P b + c \end{array}\right)$$

Quindi :
$$\boxed{\begin{aligned} A' &= {}^t M \cdot A \cdot M \\ b' &= {}^t M (A P + b) \\ c' &= {}^t P A P + 2\, {}^t b \cdot P + c \end{aligned}}$$

Per il teorema spettrale, data una quadrica

$$Q = \{p(x) = 0\} = \{ {}^t\bar{x} \, \bar{A} \, \bar{x} = 0 \},$$

posso sempre ruotare gli assi con una opportuna M in modo che

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \qquad A' = {}^t M A M$$

sia diagonale.

Esempio: $p(x,y) = 34x^2 + 41y^2 + 24xy + 20x - 10y + 4$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 34 & 12 & 10 \\ 12 & 41 & -5 \\ 10 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzare A con il teo spettrale

basta trovare base ortonormale di autovettori

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 75\lambda + 1250$$

$$\det = 34 \times 41 - 144 = 1250$$

$$\begin{array}{r} 34 \times 41 \\ \hline 34 \\ 136 \\ \hline 1394 - \\ 144 \\ \hline 1250 \end{array}$$

$$\lambda = \frac{75 \pm \sqrt{5625 - 5000}}{2} = \frac{75 \pm 25}{2}$$

$$75 \times 75 = 25^2 \times 9 = 625 \times 9$$

$$\overline{5625}$$

$$\lambda_1 = 50 \qquad \lambda_2 = 25$$

$$V_{50} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 34-50 & 12 \\ 12 & 41-50 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$V_{25} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 34-25 & 12 \\ 12 & 41-25 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 12 \\ 12 & 41 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$ è ortogonale, ed è anche simmetrica (è un caso)

$$A' = {}^tM \cdot A \cdot M$$ (verifica da fare)

Se cambio coordinate con: $x = Mx'$

A diventa $A' = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 34 & 12 \\ 12 & 41 \end{matrix}} & \begin{matrix} 10 \\ -5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 10 & -5 \end{matrix} & 4 \end{pmatrix}$$

A

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 11 \end{matrix} & 4 \end{pmatrix}$$

A'

$$\boxed{\begin{aligned} A' &= {}^tM \cdot A \cdot M \\ b' &= {}^tM (AP + b) \\ c' &= {}^tPAP + 2\,{}^tb \cdot P + c \end{aligned}}$$

Se $P = 0$

"ruotare" assi senza spostare l'origine

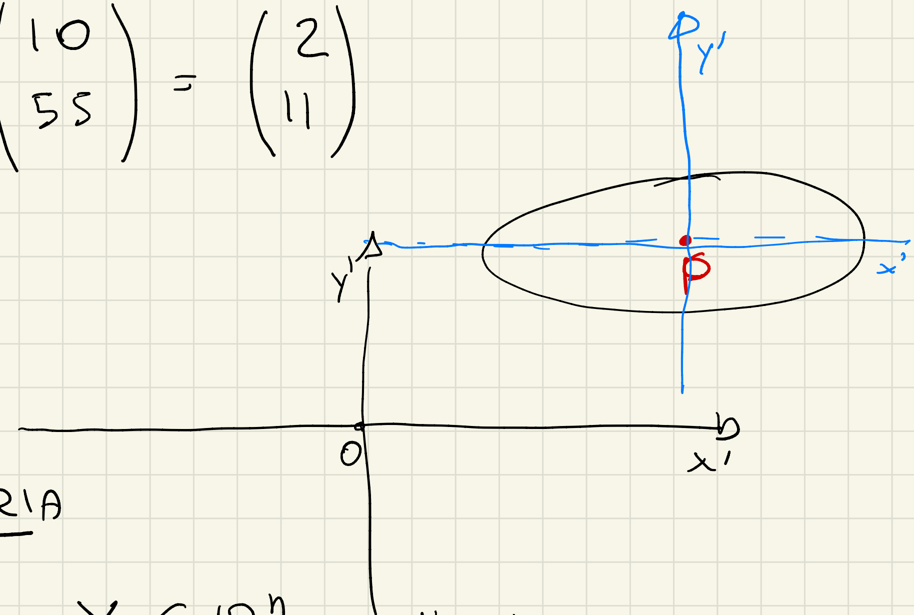
$$A' = {}^tMAM$$
$$b' = {}^tMb$$
$$c' = c$$

Se $M = I$

traslare l'origine senza ruotare gli assi

$$A' = A$$
$$b' = AP + b$$
$$c' = {}^tPAP + 2\,{}^tb \cdot P + c$$

$$b' = \frac{1}{5}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}}_{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$



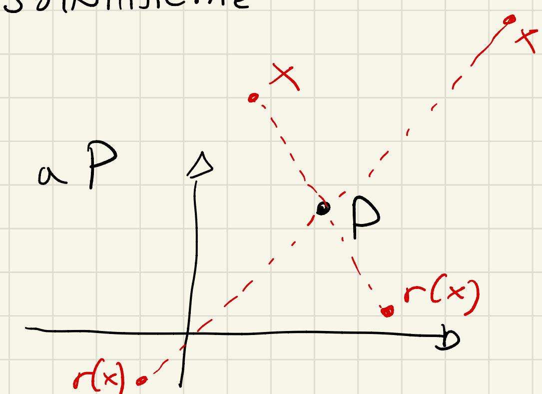
CENTRO DI SIMMETRIA

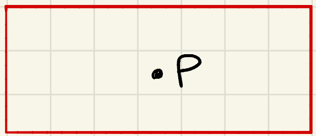
Un CENTRO DI SIMMETRIA per $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme

è un punto $P \in \mathbb{R}^n$ t.c.

se $r_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è la riflessione rispetto a P

allora $\boxed{r_P(X) = X}$

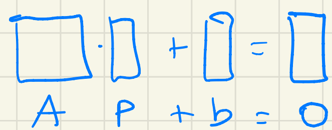


Es: 

Prop: $Q = \{ p(x) = 0 \}$ data da $\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array} \right)$

Se $\exists P \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\boxed{AP + b = 0}$

allora P è un centro di simmetria per Q



dim: Dalle formule sopra $b' = AP + b$

otteniamo che se trasliamo l'origine in P con $x = x' + P$

otteniamo $b' = 0$ e quindi nelle nuove variabili x'

il polinomio diventa

$$p(x') = {}^t x' A' x' + \cancel{2\, {}^t b' x'} + c$$

$$= \underbrace{{}^t x' A' x'}_{2^\circ} + \underbrace{c}_{0^\circ}$$

è una funzione PARI

cioè $p(x') = p(-x')$

perché p ha solo monomi di grado pari

$p(x') = p(-x')$

Quindi $p(x') = 0 \iff p(-x') = 0$

Quindi $Q = \{ p(x') = 0 \}$ è simmetrico rispetto all'origine

cioè l'origine P è un centro di simmetria. $\square$

<u>Cor</u>: Se A è invertibile, $\exists$ centro $\boxed{P = -A^{-1} b}$

$$AP + b = 0 \iff A^{-1}AP + A^{-1}b = 0$$
$$\iff P = -A^{-1}b$$

Torniamo all'esempio:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 2 \\ 0 & 25 & 11 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

A invertibile $\Rightarrow \exists$ centro $P = -A^{-1}b$

$$P = -\begin{pmatrix} 1/50 & 0 \\ 0 & 1/25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/25 \\ 11/25 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Traslo l'origine in P:

$$x = x' - P$$

$$c' = {}^tPAP + 2\,{}^tb \cdot P + c$$

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{25} \end{pmatrix}$$

$$c' = \left(-\frac{1}{25}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{2}{25} \begin{pmatrix} 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} + 4$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{2}{25} \cdot (2 + 121) + 4$$

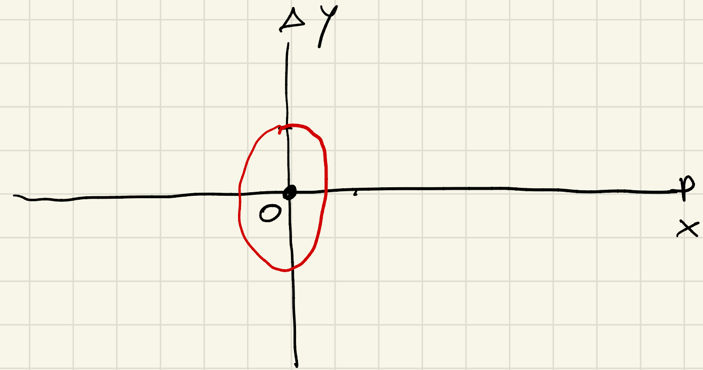
$$= \frac{1}{25} (2 + 121) - \frac{2 \cdot 123}{25} + 4 = \frac{-123 + 100}{25} = -\frac{23}{25}$$

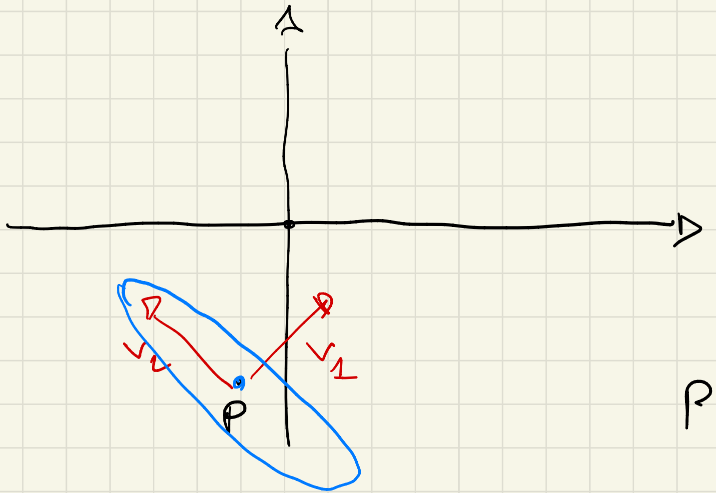
Nelle nuove coordinate otteniamo

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{25} \end{pmatrix}$$

$$Q = \left\{ 50x^2 + 25y^2 - \frac{23}{25} = 0 \right\}$$ è una ellisse

$$50x^2 + 25y^2 = \frac{23}{25}$$





$$P = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$